

## Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Zeigen Sie (ausführlich unter Verwendung der Definition  $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$  und den Körperaxiomen in 3.1, bzw. Lemma 3.5) für alle  $a, b, c, d \in K$  mit  $b, d \neq 0$ :

a)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$                       b)  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ , falls  $c \neq 0$ .

2. a) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{Q}$ , für die gilt:

$$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}.$$

- b) Bestimmen Sie die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in [-2, 7] \mid \sqrt{5x+10} - \sqrt{7-x} = 3 \right\}.$$

(Dabei dürfen Schulkenntnisse über das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.)

3. Für den Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  betrachten wir die Teilmenge  $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

- a) Berechnen Sie die Summe und das Produkt von

$$x = a + b\sqrt{2} \quad \text{und} \quad y = c + d\sqrt{2}, \quad \text{wobei } a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

- b) Zeigen Sie, daß mit  $x$  und  $y$  auch  $x + y$ ,  $x \cdot y$  sowie  $-x$  in  $K$  liegen.

(Auch hier dürfen Schulkenntnisse über das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.)

Bemerkung: De facto ist damit  $(K, +, \cdot)$  ein Körper.

4. Sei  $(K, +, \cdot, <)$  ein angeordneter Körper.

- a) Zeigen Sie (ausführlich, unter Verwendung der Anordnungsaxiome aus 3.8 der Vorlesung) für alle  $a, b, c, d \in K$ :

i)  $0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < a \cdot b$

ii)  $\left. \begin{array}{l} 0 < a < c \\ 0 < b < d \end{array} \right\} \implies a \cdot b < c \cdot d$

- b) Zeigen Sie am Beispiel von  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ , daß die Aussage

$$\text{Für alle } a, b, c, d \in K \text{ ist } a < c \wedge b < d \implies a \cdot b < c \cdot d$$

i.a. falsch ist.