

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie (ausführlich unter Verwendung der Definition $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ und den Körperaxiomen in 3.1, bzw. Lemma 3.5) für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$:

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ b) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, falls $c \neq 0$.

2. a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Q}$, für die gilt:

$$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}.$$

- b) Bestimmen Sie die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in [-2, 7] \mid \sqrt{5x+10} - \sqrt{7-x} = 3 \right\}.$$

(Dabei dürfen Schulkenntnisse über das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.)

3. Für den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ betrachten wir die Teilmenge $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- a) Berechnen Sie die Summe und das Produkt von

$$x = a + b\sqrt{2} \quad \text{und} \quad y = c + d\sqrt{2}, \quad \text{wobei } a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

- b) Zeigen Sie, daß mit x und y auch $x + y$, $x \cdot y$ sowie $-x$ in K liegen.

(Auch hier dürfen Schulkenntnisse über das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.)

Bemerkung: De facto ist damit $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

4. Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper.

- a) Zeigen Sie (ausführlich, unter Verwendung der Anordnungsaxiome aus 3.8 der Vorlesung) für alle $a, b, c, d \in K$:

i) $0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < a \cdot b$

ii) $\left. \begin{array}{l} 0 < a < c \\ 0 < b < d \end{array} \right\} \implies a \cdot b < c \cdot d$

- b) Zeigen Sie am Beispiel von $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, daß die Aussage

$$\text{Für alle } a, b, c, d \in K \text{ ist } a < c \wedge b < d \implies a \cdot b < c \cdot d$$

i.a. falsch ist.